1. Grundlegende Begriffe und Rechenregeln

Vorzeichenregel 1: Ein "Plus“ vor einer Klammer ändert beim Weglassen der Klammer nichts an den Vorzeichen, durch ein "Minus“ entsteht die Gegenzahl.

Vorzeichenregel 2: Das Ergebnis einer Multiplikation/Division von zwei Zahlen mit dem gleichen Vorzeichen ist immer positiv, bei unterschiedlichen Vorzeichen stets negativ.
Bsp. 3 · 2 = -3 ·(-2) = 6   3 · (-2) = -3 · 2 = -6

Vertauschen von Summanden/Faktoren in Summen/Produkten ändert nichts am Ergebnis (Addieren und Multiplizieren sind *kommutativ*). Für Subtraktionen/Divisionen trifft dies jedoch nicht zu!
Bsp. 2 + 5 = 5 + 2 = 7   2 · (-5) = -5 · 2 = -10   2 – 5 = -3 aber 5 – 2 = 3

Punkt- vor Strichrechnung: Multiplizieren / Dividieren hat stets Vorrang vor Addieren / Subtrahieren, außer es legen Klammern eine andere Reihenfolge fest.
Bsp. 3 · 2 + 7 = 6 + 7 = 13   3 ·(2 + 7) = 3 · 9 = 27

Klammerregel (Distributivgesetz): Wird eine Summe mit einer Zahl multipliziert, so ist jeder Summand mit dieser zu multiplizieren.
Bsp.5 · (x – 3) = (x – 3) · 5 = 5x – 15   (6x – 4) : 2 = 3x – 2

Achtung: Bei der Division durch eine Zahl gilt Gleiches, nicht jedoch beim Dividieren einer Zahl durch eine Summe!
Bsp.4 : (x – 2) ≠ 4 : x - 2

Bei der Multiplikation von zwei Summen gilt die Regel: Multipliziere jeden Summanden einer Summe mit jedem der anderen.
Bsp. (2 – x)·(3 + y) = 6 – 3x + 2y - x·y

Binomische Formeln:
Die beiden folgenden Produkte muss man jederzeit können:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \qquad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Bsp. $(3x - y)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot y + y^2 = 9x^2 - 6xy + y^2$

Herausheben: Enthält jeder Summand einer Summe den gleichen Faktor, so lässt sich diese Summe durch Umkehrung der Klammerregel in ein vollständiges Produkt umwandeln.
Bsp. $4x^3 - 16x^2 + 8x = 4x \cdot (x^2 - 4x + 2)$

2. Zahlen und Maße

2.1. Zahlenmengen

$\mathbb{N}$ .....Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4 \ldots .\}$

$\mathbb{Z}$.....Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\ldots . , -3, -2, -1,0,1,2,3 \ldots . .\}$

$\mathbb{Q}$.....Menge der rationalen Zahlen (= Zahlen, die als Bruch darstellbar sind)

$\mathbb{R}$.....Menge der reellen Zahlen

Vorzeichen und Betrag: Reelle Zahlen haben ein Vorzeichen und einen Betrag (die Mächtigkeit der Zahl). Um den Betrag anzugeben, setzt man die Zahl zwischen senkrechte Striche. Zahlen, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, bezeichnet man als Gegenzahlen.

Bsp. +2 = 2 Betrag |+2| = 2 aber |-2| = 2

2.2. Bruchrechnen

Addieren/Subtrahieren von **Bruchzahlen** erfordert denselben Nenner(!): Bei gleich bleibendem Nenner sind nur die Zähler zu addieren bzw. subtrahieren.

Bsp. $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{8}{12}+\frac{9}{12}=\frac{17}{12}$

Die Bestimmung des kgV vereinfacht die Berechnung!

Multiplikation eines Bruchs: Bei einer Zahl wird nur der Zähler, bei einem Bruch werden jeweils die Zähler und die Nenner miteinander multipliziert.

Bsp. $6\cdot\frac{4}{9}=2\cdot\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$ $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$

Division eines Bruchs durch eine Zahl: Ist der Zähler ein ganzzahliges Vielfaches der Zahl, so dividiert man nur ihn durch diese. Andernfalls ist der Nenner mit der Zahl zu multiplizieren.

Wird durch einen Bruch dividiert, so erfolgt eine Multiplikation mit dessen *Kehrwert* (Zähler und Nenner tauschen die Plätze).

Bsp. $\frac{4}{5}:2=\frac{2}{5}$ $\frac{3}{5}:2=\frac{3}{10}$ $\frac{4}{5}:\frac{2}{3}=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{2}=\frac{6}{5}$

Doppelbrüche geben das Ergebnis einer Bruchdivision wieder und können daher entsprechend der obigen Regel vereinfacht werden. Eine eigene Vorgangsweise ist also absolut unnötig!

Bsp. $\frac{\frac{4}{7}}{\frac{8}{3}}=\frac{4}{7}:\frac{8}{3}=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{8}=\frac{3}{14}$

Übungsbeispiele:

1. Wandeln Sie in eine Dezimalzahl um: a) $\frac{3}{16}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{5}{27}$ d) $\frac{7}{22}$

Lösung: 0,1875; $0,\dot{3}$; $0,\overline{185}$; $0,3\overline{18}$

2. Schreiben Sie als Bruch an: a) 0,2 b) 0,01 c) 0,25 d) 0,44 Lösung: $\frac{1}{5}, \frac{1}{100}, \frac{1}{4}, \frac{11}{25}$

3. Vereinfachen Sie zu einem durchgekürzten Bruch:

a) $\frac{6}{15} : \left(\frac{9}{10} - \frac{3}{20}\right) =$ b) $\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{3}{5} : \frac{21}{10} =$ c) $\frac{7}{4} - \left(2 - \frac{3}{5}\right) : \frac{14}{25} =$

d) $\left(\frac{7}{10} - \frac{7}{3} : \left(\frac{3}{10} - \frac{26}{45}\right)\right) : 13 =$ e) $\frac{4}{9} : \frac{11}{27} + \frac{13}{27} : \left(\frac{8}{9} - \frac{7}{12}\right) =$

Lösungen: $a)\ \frac{8}{15};\ b)\ \frac{1}{2};\ c)\ -\frac{3}{4};\ d)\ \frac{7}{10};\ e)\ \frac{8}{3}$

2.3. Prozentrechnung

$1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$ $\quad 1 \text{ Promille} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$ $\quad 1 \text{ ppm} = \frac{1}{1\,000\,000} = 0{,}000\,001$

$A = \frac{p}{100} \cdot G$ ……… G heißt Grundwert, A heißt Anteil, $\frac{p}{100}$ heißt Prozentsatz

Übungsbeispiele: Verschiedene Aufgaben zur Prozentrechnung

a) In den USA wird in Restaurants ein Trinkgeld von 15 % erwartet. Wie hoch ist das Trinkgeld, wenn die Rechnung auf 24 $ lautet?

b) Auf einen Rechnungsbetrag von € 2.400 wird ein Preisnachlass von 5 % gewährt. Ermitteln Sie den ermäßigten Rechnungsbetrag.

c) Ein Autohändler hat beim Verkauf eines Autos € 1.920, das sind 8 % des Verkaufspreises, verdient. Ermitteln Sie den Verkaufspreis.

d) Der Preis eines Fahrrades steigt um 12 % gegenüber dem alten Verkaufspreis von € 412,5. Wie lautet der neue Verkaufspreis.

e) Eine Rechnung ist auf € 450 inklusive Mehrwertsteuer (20%) ausgestellt. Berechnen Sie die Mehrwertsteuer.

f) Der Preis eines technischen Gerätes wurde von € 200 um 20 % gesenkt. Bald darauf wurde der Preis jedoch wieder um 5 % erhöht. Begründen Sie, dass die Preissenkung gegenüber dem ursprünglichen Preis nicht 20 % - 5 % = 15 % beträgt.

Lösungen: a) $3,6; b) €2280; c) €24000; d) €462; e) €75; f) Preissenkung um 16%

2.4. Potenzen und Gleitkommadarstellung

$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \cdot a$ a....Basis, n......Exponent (Hochzahl)

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ Potenzen mit negativem Exponenten können als Brüche geschrieben werden und umgekehrt.

a) Rechnen mit Potenzen

Damit die Regeln für das Rechnen mit Potenzen möglichst einfach zu formulieren sind, erweitert man den Potenzbegriff noch ein wenig:

hoch eins: Jede Zahl hoch eins ist sie selbst. $a^1 = a$ **hoch null**: Jede Zahl hoch null ergibt eins. $a^0 = 1$

Addition /Subtraktion: Nur Potenzen mit gleicher Basis und gleichem Exponenten können addiert bzw. subtrahiert werden.

Multiplikation: zwei Potenzen gleicher Basis werden multipliziert, indem man ihre Exponenten addiert.

allgemein: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ *Bsp*. $2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$

Division: zwei Potenzen gleicher Basis werden dividiert, indem man ihre Exponenten subtrahiert.

allgemein: $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ *Bsp*. $\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2$ $\frac{2^3}{2^5} = 2^{3-5} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2}$

Potenz eines Produkts: Ein Produkt wird potenziert, indem man jeden Faktor des Produktes potenziert.

allgemein: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ *Bsp*. $(2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4$

Potenz eines Bruches: Ein Bruch wird potenziert, indem man Zähler und Nenner potenziert

allgemein: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ *Bsp*. $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4}$

Potenz einer Potenz: eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten multipliziert.

allgemein: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ *Bsp*. $(a^2)^5 = a^{2 \cdot 5} = a^{10}$

Übungsbeispiele:

Vereinfachen Sie die Potenzen so weit wie möglich:

a) $2^{-4} =$ b) $(-3)^4 =$ c) $a^2 \cdot a^3 =$ d) $a^5 : a^2 =$ e) $(3a)^2 a =$ f) $(a^4)^3 =$

g) $(3x - 2)^2 =$ h) $(4a + 3b)(4a - 3b) =$ i) $a^3 \cdot a^5 : a^2 - a^4 =$ j) $(6a^2)^3 \cdot (3a)^2$

Lösungen: a) $\frac{1}{16}$ b) 81 c) a^5 d) a^3 e) $9a^3$ f) a^{12} g) $9x^2 - 12x + 4$; h) $16a^2 - 9b^2$

i) $a^6 - a^4 = a^4(a^2 - 1)$ j) $1944a^8$

b) Zehnerpotenzen: um sehr große oder kleine Zahlen zweckmäßig darstellen zu können.

$$\boxed{10^n}$$

Exponent n

Basis 10

Die Hochzahl gibt an, wie viele Nullen vor bzw. nach dem Einser stehen.

Bsp. $10^4 = 10000$ $10^2 = 100$ $10^{-2} = 0{,}01$ $10^{-4} = 0{,}0001$

c) Gleitkommadarstellung

Jede positive Zahl kann als Produkt einer Zahl m (Mantisse) zwischen 1 und 10 ($1 \leq m < 10$) und einer Zehnerpotenz geschrieben werden, die die Größenordnung der Zahl angibt. Diese Schreibweise nennt man **normalisierte Gleitkommadarstellung.**

Bsp. $123456 = 1{,}23456 \cdot 10^5$ (normalisierte Darstellung)

Die Anzahl der Stellen, um die das Komma verschoben wurde, ist der Exponent der Potenz.

Übungsbeispiele:

1. Schreiben Sie folgende Zahlen in der Gleitkommadarstellung:

a) 2400   b) 389 000   c) 87,7   d) 0,473   e) 0,000 005 9

Lösung: $2{,}4 \cdot 10^3$; $3{,}89 \cdot 10^5$; $8{,}77 \cdot 10^1$; $4{,}73 \cdot 10^{-1}$; $5{,}9 \cdot 10^{-6}$

2. Umwanden von Gleitkommazahlen: Bestimmen Sie x.

a) $9431{,}5 = 94{,}315 \cdot 10^x$ b) $0{,}7043 = 70{,}43 \cdot 10^x$ c) $9327 = x \cdot 10^3$ d) $0{,}0009124 = x \cdot 10^{-6}$

e) $37214 \cdot 10^{-7} = x \cdot 10^{-3}$ f) $4817 \cdot 10^{33} = x \cdot 10^{38}$ g) $0{,}027 \cdot 10^2 = x \cdot 10^{-2}$

Lösung: 2; -2; 9,327; 912,4; 3,7214; 0,04817; 270

3. Bedeutung von negativen Hochzahlen:

$10^{-2} =$ $10^{-3} =$ $3 \cdot 10^{-1} =$ $-10^{-2} =$ $1 - 10^{-2} =$

Lösungen: $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{1000}$; $\frac{3}{10}$; $-\frac{1}{100}$; $\frac{99}{100}$

2.5. Maßzahlen zwischen verschiedenen Einheiten umrechnen

Alle physikalischen Größen sind im **Internationalen Einheitensystem** (SI) festgelegt. Man unterscheidet zwischen **7 Grundgrößen** und Größen, die aus den Grundgrößen abgeleitet sind, den abgeleiteten Größen.

Die Grundeinheiten sind:

Grundgröße	Formelzeichen Abkürzung	Grundeinheit	Abkürzung
Länge	*l*	Meter	m
Zeit	*t*	Sekunde	s
Masse	*m*	Kilogramm	kg
Stromstärke	*I*	Ampere	A
Temperatur	*T*	Kelvin	K
Stoffmenge	*N*	Mol	mol
Lichtstärke	*I*	Candela	cd

In den Naturwissenschaften werden mit den festgelegten Einheiten (z.B. der Längeneinheit Meter) sowohl sehr große Entfernungen (in der Astronomie) als auch kleine Distanzen (in der Atomphysik) angegeben. Um unbequeme Zahlenwerte zu vermeiden, hat man **Vorsilben** geschaffen, mit denen Vielfache und Teile der SI – Einheiten ausgedrückt werden können.

Tera-	T	10^{12}	Dezi-	d	10^{-1}
Giga-	G	10^{9}	Zenti-	c	10^{-2}
Mega-	M	10^{6}	Milli-	m	10^{-3}
Kilo-	k	10^{3}	Mikro-	µ	10^{-6}
Hekto-	h	10^{2}	Nano-	n	10^{-9}
Deka-	da	10^{1}	Pico-	p	10^{-12}

Übungsbeispiele:

Wandeln Sie um:

a) 4,32 km in m   b) 0,14 µm in cm   c) 0,0043 m^2 in cm^2 d) $3,28 \cdot 10^5$ mm^2 in dm^2

e) 0,83 dm^3 in ml   f) 0,0034 t in kg   g) 0,034 dag in mg   h) 0,00072 g in µg

i) 1 km/h in m/s   j) 1 kg/m^3 in g/cm^3 k) 1 N/mm^2 in N/m^2 l) 1 kW/m^2 in W/cm^2

Lösung: a) $4,32\cdot10^3$ m; b) $1,4\cdot10^{-5}$ cm; c) 43 $(cm)^2$; d) 32,8 $(dm)^2$; e) 830 ml; f) 3,4 kg; g) 340 mg; h) 720 µg; i) ≈0,278 m/s; j) 10^{-3} g/$(cm)^3$; k) 10^6 N/m^2; l) 0,1 W/$(cm)^2$.

3. Algebra und Geometrie

3.1. Rechnen mit Termen

Definition: Eine Zahl, eine Variable oder deren Verknüpfung mit Rechenzeichen heißt **Term**. **Variablen** sind Zeichen, die stellvertretend für Zahlen oder Größen stehen, die in einem bestimmten Ausmaß frei wählbar sind.
Zahlen, die in einem Term als Faktoren bei einer Variablen stehen, heißen **Koeffizienten**.

Bezeichnungen

Konstante: fixe Zahl

Koeffizient: Zahl, die als Faktor vor einer Variablen steht

Variable: Platzhalter für eine nicht bekannte Größe

Parameter: fix vorgegebene, beliebige Zahlenwerte

$$\boxed{2x + a - 5}$$

Übungsbeispiele:

Vereinfachen Sie folgende Terme:

a) $3a - (4a - 7) - 5a =$ b) $2\cdot(4x + y) - (x - y) =$ c) $5 - (2x - 4)\cdot 3 =$ d) $(3 - x)(x + 2)=$

Lösungen: a) $-6a + 7$ b) $7x + 3y$ c) $-6x + 17$ d) $-x^2 + x + 6$

3.2. Gleichungen

In jeder Wissenschaft werden Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten durch Gleichungen beschrieben.
Zwei Terme**,** die durch ein Gleichheitszeichen verbunden sind, nennt man **Gleichung**.

Bsp. $1 + x = 8$ $x^2 = 25$

Praktische Fragestellungen lassen sich oft durch Gleichungen ausdrücken und dann systematisch lösen.
Bei einer Gleichung mit einer Variablen enthält wenigstens eine der beiden Seiten diese Variable. Sie wird oft mit x bezeichnet. In Anwendungsaufgaben wird häufig eine auf die Art der Variable hinweisende Bezeichnung gewählt.

Die Lösung einer Gleichung bleibt gleich, wenn man

a) beide Seiten vertauscht,
b) auf beiden Seiten dieselbe Zahl oder Variable addiert oder subtrahiert,
c) beide Seiten mit derselben Zahl (≠ 0) multipliziert oder durch sie dividiert.

Bsp. Lösen Sie für s ∈ ℕ:

$\frac{s}{2} + 5 = s - 1 \quad |+1$

$\frac{s}{2} + 5 + 1 = s - 1 + 1$

$\frac{s}{2} + 6 = s \quad |\cdot 2$

$\left(\frac{s}{2} + 6\right) \cdot 2 = s \cdot 2$

$s + 12 = 2s \quad |-s$

$s + 12 - s = 2s - s$

$12 = s$ |Seiten vertauschen möglich

$s = 12$

Übungsbeispiele:

Lösen Sie folgende Gleichungen nach der auftretenden Variablen:

a) $s + 2(1 - 3s) = 2 - s$ b) $1 - (d + 1) = 2 - 3d$

c) $0{,}1 \cdot (c + 3) = 0{,}02 + 0{,}3 \cdot c$ d) $2(1 - 4x) = -(1 + 2x)$

Lösungen: a) s = 0; b) d = 1; c) c = 7/5; d) x = 1/2;

3.3. Formelumformungen

Formeln nennt man (Un)Gleichungen, die neben Zahlen und Gleichungsvariablen noch weitere Variablen enthalten, die so genannten Parameter (Formvariablen). Diese sind Platzhalter für bereits festgelegte aber noch nicht eingesetzte Werte.

Tipps zum Lösen einer Gleichung und für Formelumformungen:

1. Klammern auflösen
2. Gleichung bruchfrei machen (1 und 2 kann eventuell vertauscht werden)
3. Alle Terme, die die gesuchte Variable enthalten, auf eine Seite bringen (i.a. auf die linke Seite), alle anderen Terme auf die andere Seite.
4. Gesuchte Variable herausheben.
5. Durch den Faktor (Klammerausdruck), der bei der gesuchten Variable steht, dividieren.

Bsp. Stellen Sie die Formel für die Steighöhe *h* eines Körpers mit Anfangsgeschwindigkeit v_0 nach *t* Sekunden Flugzeit nach v_0 um und dokumentieren Sie die Lösungsschritte:

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Lösung:

$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad |\cdot 2$

$2h = 2v_0 t - g t^2 \quad |+g\cdot t^2$

$2h + g \cdot t^2 = 2v_0 t$ | Seiten vertauschen

$2v_0 t = 2h + g t^2 \quad |:(2t)$

$v_o = \frac{2h + g t^2}{2t}$

Übungsbeispiele:

Berechnen Sie die gesuchten Variablen:

a) $2a - b = 3(a + b) - c$ a = ? Lösung: $a = c - 4b$

b) $a \cdot b = a + b$ b = ? Lösung: $b = \frac{a}{a-1}$

3.4. Verhältnisse und Proportionen, Schlussrechnungen

Eine Gleichung der Gestalt a : b = c : d (a,b,c,d ≠ 0) nennt man Verhältnisgleichung oder Proportion.
In einer Proportion ist das Produkt der Außenglieder gleich dem Produkt der Innenglieder:

a : b = c : d ⟷ a · d = b · c

Man erhält die Glieder der einen Seite einer Proportion, wenn man die Glieder der anderen Seite mit einem bestimmten Faktor k ≠ 0, dem sogenannten Proportionalistätsfaktor, multipliziert.

a : b = c : d ⟷ a = k · c und b = k · d

a heißt **direkt proportional** zu c und b heißt direkt proportional zu d.

Besteht zwischen zwei Größen a und c der Zusammenhang $a = \frac{k}{c}$, so heißt a **indirekt proportional** zu c.

In Textaufgaben kommt es öfters vor, dass zwei Größen direkt oder indirekt proportional sind. Diese löst man durch eine **Schlussrechnung**.

Übungsbeispiele:

1. Die Gemeinden A, B, C und D erhielten wegen erlittener Wetterschäden einen Gesamtbetrag von € 120 000 ausbezahlt, der im Verhältnis 2:3:4:6 aufgeteilt ist. Berechnen Sie die einzelnen Teilbeträge.

2. Ein elektrischer Strom mit *I* = 1 A scheidet aus einer Silbernitratlösung pro Sekunde 1,118 mg Ag aus. Wie viel Silber wird in 4 min ausgeschieden, wenn *I* = 6,3 A beträgt?

3. Ein Pelletsvorrat reicht bei einem täglich durchschnittlichen Bedarf von 50 kg für eine Heizdauer von 120 Tagen. Bestimme die Heizdauer, wenn beim gleichen Vorrat nur mehr 40 kg gebraucht werden.

Lösungen: 1. 16000€, 24000€, 32000€, 48000€, 2. direktes Verhältnis: 7,0434mg/Sekunde entspricht 1,69g pro 4 Minuten; 3. indirektes Verhältnis: 150 Tage